

Bài tập Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

A. Lý thuyết cần nhớ

1. Căn bậc hai, căn bậc hai số học

- Căn bậc hai của một số không a là số x sao cho $x^2 = a$
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau, số dương kí hiệu là \sqrt{a} , số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$
- Số 0 có đúng một căn bậc hai là số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$
- Với số dương a, số \sqrt{a} được gọi là căn bậc hai số học của a
- Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0
- Với hai số không âm a và b ta có $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

2. Căn thức bậc hai

- Với A là một biểu thức đại số, ta gọi \sqrt{A} là căn thức bậc hai của A
- \sqrt{A} xác định (hay có nghĩa) khi $A \geq 0$

$$\sqrt{A^2} = |A| \Rightarrow \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

B. Bài tập căn thức bậc hai và hằng đẳng thức

Dạng 1: Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn có nghĩa

Ví dụ 1: Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa

a. $\sqrt{3x+1}$

b. $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$

c. $\sqrt{x-2} + \frac{x}{x+2}$

Hướng dẫn giải

a. Điều kiện xác định: $3x+1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{3}$

b. Điều kiện xác định: $\frac{-2}{x+1} \geq 0$ Do $-2 < 0 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$

c. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq -2 \end{cases}$

Dạng 2: Rút gọn biểu thức, Tính giá trị của biểu thức

Phương pháp: Để tính toán các bài toán cần biến đổi và sử dụng thành thạo các dạng của các hằng đẳng thức đáng nhớ. Để đơn giản bài toán, các em có thể tham khảo thông qua ví dụ như sau:

Hàng đẳng thức đáng nhớ	Ví dụ tham khảo
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}+1^2} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1 = \sqrt{3}+1$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$\sqrt{x^2 - 4\sqrt{x^2 - 5} + 3} = \sqrt{x^2 - 5 - 4\sqrt{x^2 - 5} + 8}$ $= \sqrt{x^2 - 5 - 4\sqrt{x^2 - 5} + 2^2 + 4} = \sqrt{(\sqrt{x^2 - 5} - 2)^2 + 4}$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$\frac{1-x}{\sqrt{x}+1} = \frac{1^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1} = 1-\sqrt{x}; (x \geq 0)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x^3}-1^3}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x}$ $= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x}$ $= x + \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} = x + 1$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 1^3)}{x - \sqrt{x} + 1}$ $= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(\sqrt{a}+1)^3 = a\sqrt{a} + 3a + 3\sqrt{a} + 1$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(\sqrt{a}-1)^3 = a\sqrt{a} - 3a + 3\sqrt{a} - 1$

Dạng 3: Giải phương trình

Dạng phương trình	Ví dụ tham khảo
$A^2 = B^2$	$x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 3^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$
$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$	$\sqrt{3x-1} = \sqrt{x+2}$ Điều kiện xác định $\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow 3x-1 = x+2$ $\Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} (tm)$

$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$ $B < 0$ phương trình vô nghiệm	$\sqrt{1-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 2x = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ Vậy $x = 1$
$ A = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \\ A = -B \end{cases}$	$\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} - 2x = 0 \Leftrightarrow \left x + \frac{1}{2} \right = 2x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} = 2x \\ x + \frac{1}{2} = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1}{2} (tm) \\ x = \frac{-1}{6} (l) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
$ A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$	$ x+1 = 2x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2x+5 \\ x+1 = -2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -2 \end{cases}$
$ A + B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$	$ x^2 - 4 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \Rightarrow x = -2 \\ x = -2 \end{cases}$
$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$	Điều kiện xác định $x \geq -5$ $\sqrt{x^2 - 25} + \sqrt{x+5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ x + 5 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x+5) = 0 \\ x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 5 \\ x = -5 \end{cases} \Rightarrow x = -5$

C. Bài tập tự rèn luyện

Bài 1: Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a. $\sqrt{2x-1}$

b. $\frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2}$

g. $\sqrt{25-x^2}$

c. $\sqrt{9x-2}$

d. $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$

h. $\sqrt{x(x-1)}$

e. $\sqrt{\frac{-2}{2x-1}}$

f. $\sqrt{x^2+4}$

i. $\sqrt{x^2-5x+6}$

Bài 2: Thực hiện các phép tính sau:

a. $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

c. $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$

e. $\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}}$

b. $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$

d. $\sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}$

f. $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{9 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau đây:

a. $\sqrt{1-4x+4x^2} - 2x$

c. $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}; (x > 1)$

e. $\sqrt{(x-4)^2} + \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+16}}$

b. $a^2 + \sqrt{a^4 - 8a^2 + 16}$

d. $2x-1 - \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$

f. $\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x}$

c. $\sqrt{x^2-4x+3} = x-2$

e. $\sqrt{1-12x+36x^2} = 5$

g. $\sqrt{9x^2-12x+4} - \sqrt{x^2} = 0$

b. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2$

d. $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2-1$

f. $|3x+1| = |x+1|$

h. $\sqrt{x^2-1} - x^2 + 1 = 0$