

## Chủ đề Toán 9: Rút gọn biểu thức

### A. Cách rút gọn biểu thức và một số dạng toán liên quan

#### 1) Dạng 1: Rút gọn biểu thức có chứa căn

Phương pháp rút gọn biểu thức

Bước 1: Tìm điều kiện xác định.

Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích tử thành nhân tử.

Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung của tử và mẫu.

Bước 4: Khi nào phân thức được tối giản thì ta hoàn thành việc rút gọn.

#### 2) Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức tại $x = x_0$

Phương pháp:

Bước 1: Rút gọn biểu thức A

Bước 2: Thay giá trị  $x = x_0$  vào biểu thức đã rút gọn rồi tính kết quả.

#### 3) Dạng 3: Tính giá trị của biến $x$ để biểu thức $A = k$ (hằng số)

Phương pháp:

Bước 1: Rút gọn biểu thức A

Bước 2: Giải phương trình  $A - k = 0$

Bước 3: Kiểm tra nghiệm với điều kiện và kết luận.

### B. Bài tập ôn tập

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

a)  $\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}}$

b)  $\sqrt{(\sqrt{5}+1)\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

c)  $\frac{15}{\sqrt{6}-1} + \frac{8}{\sqrt{6}+2} + \frac{6}{3-\sqrt{6}} - 9\sqrt{6}$

### Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}} \\
 &= \sqrt{9+2.3\sqrt{5}+5} - \sqrt{9-2.3\sqrt{5}+5} \\
 &= \sqrt{3^2+2.3\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2} - \sqrt{3^2-2.3\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2} \\
 &= \sqrt{(3+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} \\
 &= |3+\sqrt{5}| - |3-\sqrt{5}| \\
 &= 3+\sqrt{5} - (3-\sqrt{5}) \\
 &= 3+\sqrt{5} - 3 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(\sqrt{5}+1)\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1^2}} \\
 &= \sqrt{(\sqrt{5}+1)\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \\
 &= \sqrt{(\sqrt{5}+1)|\sqrt{5}-1|} \\
 &= \sqrt{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2
 \end{aligned}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned}
 & \frac{15}{\sqrt{6}-1} + \frac{8}{\sqrt{6}+2} + \frac{6}{3-\sqrt{6}} - 9\sqrt{6} \\
 &= \frac{15(\sqrt{6}+1)}{6-1} + \frac{8(\sqrt{6}-2)}{6-4} + \frac{6(3+\sqrt{6})}{9-6} - 9\sqrt{6} \\
 &= \frac{15(\sqrt{6}+1)}{5} + \frac{8(\sqrt{6}-2)}{2} + \frac{6(3+\sqrt{6})}{3} - 9\sqrt{6} \\
 &= \frac{15(\sqrt{6}+1)}{5} + \frac{8(\sqrt{6}-2)}{2} + \frac{6(3+\sqrt{6})}{3} - 9\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{90(\sqrt{6}+1)}{30} + \frac{120(\sqrt{6}-2)}{30} + \frac{60(3+\sqrt{6})}{30} - \frac{270\sqrt{6}}{30} \\
 &= \frac{90(\sqrt{6}+1)+120(\sqrt{6}-2)+60(3+\sqrt{6})-270\sqrt{6}}{30} \\
 &= \frac{90\sqrt{6}+90+120\sqrt{6}-240+180+60\sqrt{6}-270\sqrt{6}}{30} \\
 &= \frac{30}{30} = 1
 \end{aligned}$$

**Ví dụ 2:** Cho biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$  với  $x \geq 0; x \neq 25$

- Rút gọn biểu thức A
- Tính giá trị của A khi  $x = 9$
- Tính giá trị của x để biểu thức  $A = 0,5$

**Hướng dẫn giải**

$$\begin{aligned}
 \text{a. } A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5} \\
 A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} - \frac{5}{\sqrt{x}+5} \\
 A &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} - \frac{10\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} - \frac{5(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\
 A &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5) - 10\sqrt{x} - 5(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\
 A &= \frac{x+5\sqrt{x}-10\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\
 A &= \frac{x-10\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{(\sqrt{x}-5)^2}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}
 \end{aligned}$$

b. Thay  $x = 9$  vào biểu thức ta có:  $A = \frac{\sqrt{9}-5}{\sqrt{9}+5} = \frac{3-5}{3+5} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

Kết luận khi  $x = 9$  thì  $A = -\frac{1}{4}$

c. Ta có:

$$A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+5+2(\sqrt{x}-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+5+2\sqrt{x}-10=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}-5=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{25}{9}$$

Kết luận  $A = 2$  khi  $x = \frac{25}{9}$

**Ví dụ 3:** Cho các biểu thức  $H = \frac{x-\sqrt[3]{x}}{x-1}$  và  $K = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$  với  $x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức H khi  $x = 8$

b) Rút gọn biểu thức  $P = H + K$

c) Tìm giá trị của x để  $P = 1,5$

**Hướng dẫn giải**

a. Thay  $x = 8$  vào H ta có:  $H = \frac{8-\sqrt[3]{8}}{8-1} = \frac{8-2}{7} = \frac{6}{7}$

b. Ta có:

$$P = H + K$$

$$\Rightarrow P = \frac{x-\sqrt[3]{x}}{x-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$P = \frac{x-\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} + \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1} + \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$P = \frac{x-\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} + \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} + \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$P = \frac{x-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1+\sqrt[3]{x}-1}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$P = \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

### C. Bài tập tự rèn luyện

#### Bài 1:

a)  $\left(1 - \frac{\sqrt{5} + 5}{1 + \sqrt{5}}\right) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} - 1\right)$

b)  $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} - (2 + \sqrt{3})$

c)  $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{(\sqrt{2} - 5\sqrt{3})^2}$

d)  $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

e)  $\sqrt{\sqrt{15} - 6\sqrt{6}} + \sqrt{33 - 12\sqrt{6}}$

f)  $\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

#### Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right)$  với  $x > 0; x \neq 1$

b)  $N = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + 4\sqrt{x}\right) : \frac{2x\sqrt{x}}{x - 1}$  với  $x \geq 0; x \neq 9$

c)  $P = \frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} : \left(\frac{x + y}{x - y} - \frac{y}{y - \sqrt{xy}} + \frac{x}{\sqrt{xy} + x}\right) - \frac{\sqrt{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}}{2}$  với  $y > x > 0$

d)  $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}\right)$

#### Bài 3: Cho biểu thức: $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}\right)$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức B có nghĩa.

 b) Tính giá trị của biểu thức B biết  $x = 9 - 4\sqrt{5}$ 

c) Tìm giá trị của x để B dương.

**Bài 4:** Cho biểu thức:  $C = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{5\sqrt{x}-4}{2\sqrt{x}-x} \right) : \left( \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right)$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức C có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức C

c) Tính giá trị của biểu thức C biết  $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

**Bài 5:** Cho biểu thức:  $D = \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1}$

a) Tìm điều kiện xác định của D

b) Rút gọn biểu thức D

c) Tính giá trị của x để biểu thức D < 0,5

**Bài 6:** Cho biểu thức:  $E = \left( \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x-3}{x-9} \right) : \left( \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1 \right)$

a) Tìm điều kiện xác định của E

b) Rút gọn biểu thức E

c) Tính giá trị của x để biểu thức E < -0,5

**Bài 7:** Cho biểu thức:  $F = \left( \frac{x-7\sqrt{x}+12}{x-4\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$  với  $x \geq 0; x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức F

b) Tìm giá trị của x để F > 0,75

c) Tìm x để P = 2

**Bài 8:** Chứng minh rằng  $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{6}$